Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
13 Σεπτεμβρίου 2013

Θέμα 1. (α΄) Δώστε ένα κριτήριο σύγκλισης μιας ακολουθίας διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$,

$$\bar{x}_\nu = \left(x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \ldots, x_\nu^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

προς ένα διάνυσμα $\bar{x}_0 = \left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$ όταν $\nu \to \infty$, και υπολογίστε το όριο της

$$\bar{x}_\nu = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^2}, \ldots, \frac{1}{\nu^n}\right), \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

(β΄) Δώστε τους ορισμούς της συνέχειας και της διαφορισιμότητας μιας διανυσματικής συνάρτησης $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, και δείξτε ότι αν η $\bar{f}$ είναι διαφορίσιμη, τότε είναι και συνεχής.

(γ΄) Εξετάστε σε κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

ως προς τη συνέχεια, τη μερική διαφορισιμότητα, τη διαφορισιμότητα και τη συνεχή διαφορισιμότητά της και υπολογίστε (όπου υπάρχει) την παράγωγό της.

Θέμα 2. Θεωρούμε ότι το γράφημα της συνάρτησης

$$f(x,y) = 4 - (x-1)^2 - 4(y-2)^2, \qquad (x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 4(y-2)^2 < 4\}$$

αναπαριστά την επιφάνεια ενός βουνού πάνω από το χάρτη $\mathbb{R}^2$ και με συντεταγμένες $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(α΄) Ποιές είναι οι συντεταγμένες της κορυφής του βουνού και ποιό το ύψος του εκεί;

(β΄) Ποιό είναι το εφαπτόμενο επίπεδο στην κορυφή του βουνού;

(γ΄) Έχει άλλα ακρότατα το βουνό; Αν ναι, ποιά; Αν όχι, γιατί;

(δ΄) Θέλετε να φτιάξετε έναν περιμετρικό δρόμο με σταθερό ύψος $z = 2$ πάνω στην επιφάνεια του βουνού. Δώστε το σύνολο των συντεταγμένων του δρόμου αυτού στο χάρτη στην μορφή $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ldots \}$. Πώς ονομάζεται αυτό το σύνολο σε σχέση με την f; Ποιά είναι η κατεύθυνση $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ του μεγαλύτερου ρυθμού μεταβολής του ύψους της πλαγιάς του βουνού στο σημείο του περιμετρικού δρόμου με συντεταγμένες $(2, \frac{5}{2}) \in C$;

(ε΄) Δώστε μια παραμετρικοποίηση $\bar{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με $\bar{\gamma}([0,2\pi]) = C$ της καμπύλης C του (δ'), το μήκος της $\bar{\gamma}$ (δηλ. της C) και τη γωνία μεταξύ της (εφαπτομένης της) C και της κατεύθυνσης $\bar{v}$ του (δ') στο σημείο $(2, \frac{5}{2}) \in C$.

Θέμα 3. (α΄) Δείξτε ότι $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ και ότι για $n \geq 3$ η συνάρτηση $u(\bar{x}) = \|\bar{x}\|^{2-n}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$, είναι αρμονική, δηλαδή επιλύει την εξίσωση Laplace $\Delta u = 0$ στον $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$.

(β΄) Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε ο περιορισμός της διανυσματικής συνάρτησης

$$\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + x \\ y^2 + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

στον ανοικτό κυκλικό δίσκο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας δ να είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε την παράγωγο της αντίστροφής του στο σημείο $(0,0)$ της εικόνας του.

(γ΄) Βρείτε τα σημεία τοπικών και ολικών ακροτάτων της $f(x,y) = x^3 y$ στον $\mathbb{R}^2$ και στον κλειστό μοναδιαίο κυκλικό δίσκο (κέντρου $(0,0)$) και χαρακτηρίστε τα.

(δ΄) Δείξτε ότι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα (κέντρου $\bar{0}$) στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (ως προς τη μετρική που επάγεται από την ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$).

Λαμβάνονται υπόψη μόνο δικαιολογημένες απαντήσεις! Σκεφτείτε πριν υπολογίσετε!
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!